



TITLE:

# 危険回避と微分ゲーム(非線形解析学と数理経済学の研究)

AUTHOR(S):

西尾, 真喜子

---

CITATION:

西尾, 真喜子. 危険回避と微分ゲーム(非線形解析学と数理経済学の研究). 数理解析研究所講究録 1994, 861: 154-166

ISSUE DATE:

1994-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83837>

RIGHT:

## 危険回避と微分ゲーム - 4

大阪電通大 西尾真喜子 (Makiko Nisio)

1. 序論. Barron-Jensen [2] は, 株価のようにランダムに時間変動する系の制御に関連して, 次の様な問題を取り扱った.  $B$  を  $d$  次元ブラウン運動,  $B(0)=0$ , とし,  $n$  次元の系  $X$  が (1-1) に従って, 時間発展する.

$$(1-1) \quad \frac{dX}{dt} = f(X(t), y+B(t), U(t)), \quad t > 0$$

初期条件;  $X(0) = x$ .

但し,  $U$  は制御過程,  $f: R^n \times R^d \times R^q \rightarrow R^n$  は有界なからか.

$\gamma$  を (危険回避) 効用関数, (1-1) の解を  $X(t; x, y, U)$  と書く. 評価関数  $E[g(X(t; x, y, U)) + \int_0^t h(X(s; x, y, U)) ds]$  の代わりに, 平均効用を最大にする制御を行うことにする.

(したがって, 値関数  $v_\gamma(t, x, y) = \sup_U E[g(X(t; x, y, U)) + \int_0^t h(X(s; x, y, U)) ds]$ , 確実等価値関数 (certainty equivalent value function)  $V_\gamma(t, x, y) = \gamma^{-1} v_\gamma(t, x, y)$ .

[2]では, 危険回避度  $(= -Y''(\theta)/Y'(\theta)) \rightarrow \infty$  のとき,  $V_Y$  の極限が微分ゲームに關係することを示している。

次節でこの結果を紹介し, 運動系が発展方程式に従う場合を, 3節と4節で報告したい。この場合, 証明の都合上効用関数は危険回避度一定な関数,  $-e^{-\frac{\theta}{c}}$  ( $c > 0$ ), 評価関数としても,  $g = 0$  の場合に制限された。2節でも, この様な場合で[2]を紹介したい。

2. 有限次元運動系の場合。 時間  $T > 0$  を固定しておく。  
 $B$  を確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上の  $d$  次元ブラウン運動,  $B(0) = 0$ ,  
 $U: [0, T] \times \Omega \rightarrow R^q$  が  $B$ -適合な有界確率過程のとき  
 制御過程という。  $\mathcal{U}$  を制御過程全体とする。  $h: R^n \rightarrow R^1$   
 を Lipschitz 連続, 効用関数を  $Q_c(\theta) = -e^{-\theta/c}$ ,  $\theta \in R^1$ ,  
 ( $c > 0$ ) とし, 制御問題,

$$E Q_c \left( \int_0^t h(X(s, x, y, U)) ds \right) \longrightarrow \max$$

を考える。したがって, 値関数  $v_c$ , 確実算値関数  $V_c$  は次式で定義される。

$$(2-1) \quad \begin{aligned} v_c(t, x, y) &= \sup_{U \in \mathcal{U}} E Q_c \left( \int_0^t h(X(s, x, y, U)) ds \right) \\ V_c(t, x, y) &= Q_c^{-1} v_c(t, x, y) \end{aligned}$$

値関数はベルマン原理を満たすな,  $V_c$  は H-J-B eq. の一意粘性解になる. [有限次元非線型方程式の粘性解については [3] を参照]. 従って,  $V_c$  について次の定理が成立する.

定理 2.1.  $V_c$  は (2-2) の一意粘性解である.

$$(2-2) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta_y V + \frac{1}{2c} |\nabla_y V|^2 - \sup_{u \in R^q} (\nabla_x V(t, x, y), f(x, y, u)) \\ - h(x) = 0, & 0 < t < T, \quad x \in R^n, y \in R^d. \\ V(0, x, y) = 0 \end{cases}$$

ここで,  $\nabla_z = z$  に関する gradient,  $\Delta_z = z$  の Laplacian,

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

$Q_c$  の危険回避度は定数  $c$  であるが,  $c \rightarrow 0$  のとき

$V_c$  の極限は次のようになる.

定理 2.2.  $c \rightarrow 0$  のとき,  $V_c$  は広義一様に収束し,

極限関数  $V$  は  $y$  に無関係で, min-max 方程式 (2-3) の一意粘性解になる.

$$(2-3) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \inf_{y \in R^d} \sup_{u \in R^q} (\nabla_x V(t, x), f(x, y, u)) - h(x) = 0 \\ T > t > 0, \quad x \in R^n \\ V(0, x) = 0 \end{cases}$$

とらな, 微分 (2-3) の upper value が (2-3) の粘性解

を与えることは、よく知られている。大ざっぱに言えば、危険回避度 $\infty$ の極限では randomness を相対に $\gamma \rightarrow 0$ をすることになる。

$U(t) = z + \int_0^t W(s) ds$ , 但し  $z \in \mathbb{R}^q$ ,  $W$  は  $B$ -適合で  $\sup_{s, \omega} |W(s, \omega)| \leq M$ , と表わされる制御過程は定数  $M$  の Lipschitz control と呼ばれる。(1-1)の解  $X$  を初期値  $(x, y, z)$  の関数とみなし, 許容される制御を定数  $M$  の Lipschitz control に制限した時の値関数, 確実等価値関数を  $v_c^M(t, x, y, z)$ ,  $V_c^M(t, x, y, z)$  と書くことにする。

### 定理 2.3.

(i)  $V_c^M$  は (2-4) の一意の粘性解になる。

$$(2-4) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta_y V + \frac{1}{2c} |\nabla_y V|^2 - M |\nabla_z V| \\ - (\nabla_x V(t, x, y, z), f(x, y, z)) - h(x) = 0 \\ V(0, x, y, z) = 0 \end{cases}$$

(ii)  $c \rightarrow 0$  のとき,  $V_c^M$  は広義一様収束し, 極限関数  $V^M$  は  $y$  に無関係で, (2-5) の一意の粘性解になる。

$$(2-5) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - M |\nabla_z V| - \inf_{y \in \mathbb{R}^q} (\nabla_x V(t, x, z), f(x, y, z)) - h(x) = 0 \\ V(0, x, z) = 0 \end{cases}$$

(iii)  $M \rightarrow \infty$  のとき,  $V^M$  は広義一様収束し, 極限関数  $V$  はそれに無関係で, (2-6) の一意粘性解になる.

$$(2-6) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \sup_{z \in \mathbb{R}^0} \inf_{y \in \mathbb{R}^d} (\nabla_x V(t, x), f(x, y, z)) - h(x) = 0 \\ V(0, x) = 0 \end{cases}$$

(2-6) 式は, (2-3) 式の  $\inf \sup$  が  $\sup \inf$  に変更された式で, 同じ微分方程式の lower value が粘性解を与えることが知られている。

3. 発展方程式の場合. 発展方程式 (3-1) に従う系について, 同様な問題を考えよう。

$$(3-1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi(t, x)}{\partial t} = A \xi(t, x) + b(x, \xi(t, x), y+B(t), L(t, x)) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t < T. \\ \xi(0, \cdot) = \eta \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

ここで  $A$  は楕円型微分作用素,

$$A \xi = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n r^i(x) \frac{\partial \xi}{\partial x_i} - c(x) \xi,$$

また, 制御過程  $L(t, x)$  を次のように定義する。

$L = L^2(\mathbb{R}^n; e^{-|x|^2} dx)$  とおき, 制御域  $\Gamma$  は  $L$ , または, それの有限次元部分空間とする.  $B$ -適合  $\Gamma$  値確率過程  $U$  が有界 (i.e.  $\sup_{t, \omega} \|U(t, \omega)\|_L < \infty$ ) のとき制御過程とよび,  $U(t, x) = U(t)(x)$  とおく.  $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ ,  $\langle, \rangle =$  内積,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$  とおく. 仮定.

(A.1)  $a^{ij}, \gamma^i \in C^3(\mathbb{R}^n)$  且  $C^3$ -norm 有限.

(A.2) 行列  $(a^{ij}(x))$  は一様正定符号.

(A.3)  $c$  は有界連続な非負関数

(A.4)  $b$  は  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^1$  上有界 Lipschitz 連続.

(A.5)  $\exists \hat{b} \in L^2(\mathbb{R}^n); \sup_{x, y, u} |b(x, a, y, u)| \leq \hat{b}(x)$  且  $\hat{b}$  は  $|x|$  のみに依存する減少連続関数.

仮定 (A.2) より (3-2) が成立つ

$$(3-2) \quad \exists \mu > 0; \quad -\langle A\xi, \xi \rangle + \mu \|\xi\|^2 \geq 0 \quad \forall \xi \in H^1.$$

さて, (A.4), (A.5) により,  $\beta: H \times \mathbb{R}^d \times \Gamma \rightarrow H$  を  $\beta(t, y, u)(x) = b(x, t(x), y, u(x))$  と定義し,  $H$  上の方程式 (3-3) の解を (3-1) の解とよぶ.

$$(3-3) \quad \xi(t) = e^{tA} \eta + \int_0^t e^{(t-s)A} \beta(\xi(s), y+B(s), U(s)) ds.$$

$\beta$  は明らかに次の連続性を持つ

$$(3-4) \quad \|\beta(t, z, u) - \beta(t', z', u')\| \leq k(\|t - t'\| + m(y - y') + m(u - u'))$$

但し,  $k$  は定数,  $m(a)^2 = \int \min(|a(x)|^2, \hat{b}(x)^2) dx$ .

故に, (3-3) は一意解  $\alpha(t, z, y, u)$  を持つ.

$h; H \rightarrow R'$  は (A. 6) を満たす有界 Lipschitz 連続とする.

(A. 6)  $\exists F; [0, \infty)$  上の有界減少連続関数,  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} F(\theta) = 0$

$$|h(z) - h(z')| \leq F(R)(\|z\| + \|z'\|), \quad \{|x| \leq R\} \text{ 上で } z = z' \text{ とする.}$$

例えば,  $h(t) = \varphi(\langle t, e_1 \rangle, \dots, \langle t, e_p \rangle)$  となめらかな関数  $\varphi$  で表わされる場合は (A. 6) が成立つ.

値関数  $v_c$ , 確実算価値関数  $V_c$  は, (2-1) と同様に定義され,  $c$  に無関係な次の評価が証明出来る.  $\rho; [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$  をなめらかな減少関数で  $\rho = 1$  on  $[0, 1]$ ,  $= 0$  on  $[2, \infty)$  とする.  $\Gamma_R(x) = \rho(|x|/R)$  とおく.

定理 3.1.

$$(3-5) \quad |V_c(t, z, y)| \leq t \|h\|_\infty$$

$$(3-6) \quad |V_c(t, z, y) - V_c(t', z', y')| \leq |t - t'| \|h\|_\infty + K \{ F(R) (\|z\| + \|z'\| + \|\hat{b}\|) + \|\Gamma_R(z - z')\|_{-1} + \frac{1}{\sqrt{R}} \|z - z'\| + m(y - y') \}$$

ここで,  $K$  は  $c, R$  に無関係.

さて,  $V_c$  が必要な regularity を持つならば, (3-7) を満たすこと加形式的な計算で示される.



$$(3-7) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \langle A^* \partial V, \eta \rangle - \frac{1}{2} \Delta_\eta V + \frac{1}{2c} |\nabla_\eta V|^2 - h(\eta) \\ \quad - \sup_{u \in \Gamma} \langle \partial V(t, \eta, \gamma), \beta(\eta, \gamma, u) \rangle = 0 \\ V(0, \eta, \gamma) = 0. \end{cases}$$

ここで,  $A^* = A$  の adjoint,  $\partial = \eta$  に関する Frechet 微分.

前節と同様,  $V_c$  は粘性解になるが, 我々が関係するヒルベルト空間上の方程式の粘性解の定義と比較定理を, [5] に従って必要な程度に述べておく.

$$(3-8) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} - \langle A^* \partial W, \eta \rangle - \lambda_1 \Delta_\eta W + \lambda_2 |\nabla_\eta W|^2 + G(\eta, W(t, \eta, \gamma), \partial W) \\ \quad = 0 \\ W(0, \eta, \gamma) = 0 \end{cases}$$

ここで  $\lambda_i$  は定数,  $G: H \times R^1 \times H \rightarrow R^1$  は Lipschitz 連続,  $\Phi \in C^{1,1,2}([0,T] \times H \times R^d)$  が weakly sequential lower semi-continuous.  $\eta$   $A^* \partial \Phi$  が連続のとき test function, また, radial な  $g \in C^2(H)$  が非減少  $g(0) = 0$  のとき radial function と呼ぶことにする.

定義.  $W \in C([0,T] \times H \times R^d)$ ,  $W(0, \eta, \gamma) = 0$ , が任意の test function  $\Phi$  と radial function  $g$  に対して次の条件を満たすとき (3-8) の sub solution (resp.

super solution) (in viscosity sense) とする。

$\hat{z} = (\hat{t}, \hat{\eta}, \hat{g}) \in (0, T) \times H \times \mathbb{R}^d$  が  $W - \Phi - g$  (resp.  $W + \Phi + g$ ) の local maximum (resp. minimum) を与えるとき,

$$(3-9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\hat{z}) - \langle A^* \partial \Phi(\hat{z}), \hat{\eta} \rangle - \lambda_1 \Delta_y \Phi(\hat{z}) + \lambda_2 |\nabla_y \Phi(\hat{z})|^2 \\ + G(\hat{\eta}, W(\hat{z}), \partial \Phi(\hat{z}) + \partial g(\hat{\eta})) \leq \mu g'(\|\hat{\eta}\|) \|\hat{\eta}\|, \end{aligned}$$

$$\left[ \begin{aligned} \text{resp. } -\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\hat{z}) + \langle A^* \partial \Phi(\hat{z}), \hat{\eta} \rangle + \lambda_1 \Delta_y \Phi(\hat{z}) + \lambda_2 |\nabla_y \Phi(\hat{z})|^2 \\ + G(\hat{\eta}, W(\hat{z}), -\partial \Phi(\hat{z}) - \partial g(\hat{\eta})) \geq -\mu g'(\|\hat{\eta}\|) \|\hat{\eta}\| \end{aligned} \right]$$

ここで  $\mu$  は (3-2) の定数。

$W$  が subsolution 且 supersolution のとき, 粘性解と呼ぶ。  
弱位相を  $H$  に入れた時,  $H_w$  と書く。

比較定理.  $W, \hat{W} \in UC([0, T] \times H \times \mathbb{R}^d) \cap C([0, T] \times H_w \times \mathbb{R}^d)$  とする。 $W$  が (3-8) の subsolution,  $\hat{W}$  が supersolution ならば,  $W \leq \hat{W}$ 。

(A.4) と定理 3.1 の詳細より,  $V_c \in UC([0, T] \times H \times \mathbb{R}^d) \cap C([0, T] \times H_w \times \mathbb{R}^d)$ , 故に, 有限次元の場合と同様伊藤公式を用いて, 次の定理が証明される。

定理 3.2.  $V_c$  は (3-7) の一意の粘性解になる。

さらに, 定理 3.1 は  $\{V_c, c > 0\}$  のコンパクト性を与える為, 前節と同様な結果を導くことが出来る。

定理 3.3.  $c \rightarrow 0$  のとき,  $V_c$  は  $[0, T] \times H \times R^d$  上左義一致収束し, 極限関数  $V$  は  $\gamma$  に無関係で,  $\min$ - $\max$  方程式の一意の粘性解になる

$$(3-10) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \langle A^* \partial V, \gamma \rangle - \inf_{\gamma \in \mathcal{P}^d} \sup_{u \in \Gamma} \langle \partial V(t, \gamma), \beta(\gamma, \gamma, u) \rangle \\ \quad - h(\gamma) = 0 \\ V(0, \gamma) = 0 \end{cases}$$

(注). 前節と同様, 微分  $\gamma = \gamma$  の upper value が (3-10) の粘性解を与えている.

4. Lipschitz control. この節では, 制御域  $\Gamma$  は  $e_1, \dots, e_g$  (ただし  $e_1, \dots, e_g$  は  $H$  の正規直交系) から生成される  $L$  の有限次元部分空間とする。制御過程  $U$  が

$$(4-1) \quad U(t) = z + \int_0^t \gamma(s) ds$$

ここで,  $z \in \Gamma$ ,  $\gamma$  は  $B$ -適合  $\Gamma$  値確率過程で  $\sup_{s \leq t} \|\gamma(s, \omega)\| \leq M$  とする。この様に書けるとき,  $U$  を定数  $M$  の Lipschitz control と呼ぶ。  $U^i = \langle U, e_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, g$ , とおき, 制御過程を  $g$  次元確率過程と同一視し,  $\beta$  を  $H \times R^d \times R^g$  上の関数とみなす。

さて, 3節の問題を Lipschitz control に制限して考えよう。[1]に従って,  $R^g$  の ball  $\{|w| \leq M\} \in$  制御域

$z(s) = (z'(s), \dots, z^q(s))$  を admissible control とし, (3-1) の代りに次の系を取扱う。

$$(4-2) \quad \begin{cases} d\xi(t) = (A\xi(t) + \beta(\xi(t), \gamma(t), U(t))) dt \\ dY(t) = dB(t) \\ dU(t) = z(t) dt \end{cases}$$

初期条件;  $\xi(0) = \eta (\in H)$ ,  $Y(0) = y (\in R^d)$ ,  $U(0) = z (\in R^q)$ .

(4-2) の解を  $\xi(t; \eta, y, z, z)$  と表わし, 価値関数, 確実等価価値関数を, それぞれ  $v_c^M(t, \eta, y, z)$ ,  $V_c^M(t, \eta, y, z)$  と書く。

定理 4.1.  $V_c^M$  は (4-3) の一意の粘性解である。

$$(4-3) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \langle A^* \partial V, \eta \rangle - \frac{1}{2} \Delta_y V + \frac{1}{2c} |\nabla_y V|^2 - M |\nabla_z V| \\ \quad - \langle \partial V(t, \eta, y, z), \beta(\eta, y, z) \rangle - h(\eta) = 0 \\ V(0, \eta, y, z) = 0 \end{cases}$$

証明.  $v_c^M$  はヘルマン原理をみたす後, (4-4) の一意の粘性解になる事が容易に分る。

$$(4-4) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \langle A^* \partial v, \eta \rangle - \frac{1}{2} \Delta_y v - \langle \partial v(t, \eta, y, z), \beta(\eta, y, z) \rangle \\ \quad - \sup_{|w| \leq M} (\nabla_z v, w) + \frac{1}{c} h(\eta) v = 0 \\ v(0, \eta, y, z) = -1 \end{cases}$$

故に,  $V_c^M = Q_c^{-1}(v_c^M)$  は次式の一意の粘性解になる。

$$(4-5) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \langle A^* \partial V, \eta \rangle - \frac{1}{2} \Delta_y V + \frac{1}{2c} |\nabla_y V|^2 - \sup_{|w| \leq M} (\nabla_z V, w) \\ \quad - \langle \partial V(t, \eta, y, z), \beta(\eta, y, z) \rangle - h(\eta) = 0 \\ V(0, \eta, y, z) = 0 \end{cases}$$

ところが,  $\delta \in \mathbb{R}^q$  に対し,  $\sup_{|w| \leq M} (\delta, w) = M|\delta|$  となるから, 定理が成立する。■

定理 3.1 の評価を用いて, 前節と同様の結果を導くことが出来る。

#### 定理 4.2.

(i)  $M$  を固定しておく。  $c \rightarrow 0$  のとき,  $V_c^M$  は  $[0, T] \times H \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q$  上広義一様収束し, その極限関数  $V^M$  は  $\eta$  に無関係で (4-6) の一意の粘性解である。

$$(4-6) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} - \langle A^* \partial V, \eta \rangle - M |\nabla_z V| \\ \quad - \inf_{z \in \mathbb{R}^d} \langle \partial V(t, \eta, z), \beta(\eta, y, z) \rangle - h(\eta) = 0 \\ V(0, \eta, z) = 0 \end{cases}$$

(ii).  $M \rightarrow \infty$  のとき,  $V^M$  は  $[0, T] \times H \times \mathbb{R}^q$  上広義一様収束し, 極限関数  $W$  は  $z$  に無関係になり, max-min 方程式 (4-7) の一意の粘性解である。

$$(4-7) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} - \langle A^* \partial W, \eta \rangle - \sup_{z \in \mathbb{R}^1} \inf_{y \in \mathbb{R}^d} \langle \partial W(t, \eta), \beta(\eta, y, z) \rangle - h(\eta) = 0 \\ W(0, \eta) = 0 \end{cases}$$

(注). 既に注意したように, 極限関数  $W$  は微分  $\gamma^* - \alpha$  の lower value と等しくなる。さらに,  $\Gamma$  を  $\mathbb{R}^1$  と同一視したとき (4-7) は (3-11) の  $\inf \sup$  が  $\sup \inf$  に変わった方程式になり,  $V$  と  $W$  は同じ微分  $\gamma^* - \alpha$  の upper value と lower value になる。また,  $c$  を固定して  $M \rightarrow \infty$  とすれば,  $V_c^M$  は  $V_c$  に収束する。したがって  $\lim_{c \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow \infty} V_c^M = V$ 。

#### References

1. E.N.Barron, L.C.Evans & R.Jensen; Viscosity solutions of Isaacs' equations and differential games with Lipschitz controls Jour.Diff.Eq.53.213-233(1984)
2. E.N.Barron & R.Jensen; Total risk aversion, stochastic optimal control and differential games, Appl.Math.Opt.19.313-327(1989)
3. M.G.Crandall, H.Ishii & P.L.Lions; A user's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull.Amer.Math.Soc. N.S. 27.1-67(1992)
4. M.Nisio; On total risk aversion and differential games for controlled parabolic equations, Proc.Jap.Acad.69.119-124(1993)
5. A.Świech; Viscosity solutions of fully nonlinear partial differential equations with unbounded terms in infinite dimensions, Thesis, Univ. of Calif. (1993)